

РЕГИОНАЛЬНАЯ ЭКОНОМИКА

УДК 330.42

М.В. ДУБОВИК,

доктор экономических наук, доцент

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова

С.Г. ДМИТРИЕВ,

кандидат экономических наук

*Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова,
Брянский филиал*

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИВЕРГЕНТНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ РЕГИОНОВ РОССИИ

Аннотация. Целью статьи является проверка гипотезы о персистентности дивергентного развития регионов России. Авторами применен фрактальный анализ для выявления устойчивых паттернов в динамике среднедушевого денежного дохода населения регионов. Полученные значения экспоненты Херста, а также фрактальной размерности для анализируемых переменных подтверждают авторскую гипотезу об устойчивости межрегионального неравенства по выбранному показателю. Высокие значения показателя Херста и фрактальной размерности в некоторых регионах свидетельствуют об увеличении межрегионального неравенства. Регионы с устойчивым ростом будут продолжать развиваться быстрее, в то время как отстающие регионы будут все больше отставать. Результаты нашего исследования подчеркивают важность разработки и внедрения региональных экономических стратегий, направленных на уменьшение неравенства и поддержку менее развитых регионов. Использование фрактального анализа и показателя Херста в нашем исследовании позволило глубже понять динамику и структурные особенности экономического развития регионов, что дополняет традиционные методы экономического анализа. Авторы пришли к выводу, что динамике среднедушевого денежного дохода свойственна сильная зависимость от предыдущих значений, что, с одной стороны, свидетельствует об устойчивости к внешним шокам, а с другой стороны, говорит о консервации существующих тенденций к расхождению траекторий экономического развития регионов страны.

Ключевые слова: фрактальный анализ, дивергенция, региональное экономическое развитие, персистентность.

Введение. Фрактальный анализ в экономике представляет собой мощный инструмент для исследования и прогнозирования экономических процессов, особенно в условиях нестационарности. Основанный на теории фракталов, введенной в научный обиход Б. Мандельбротом [13], этот метод позволяет выявлять сложные, самоподобные структуры в динамике финансовых рынков и других экономических систем. Он активно используется для прогнозирования экономических кризисов [4], моделирования рыночных процессов [6] и оценки неустойчивости рынка.

Литературный обзор. Фрактальный анализ востребован среди экономистов и аналитиков для понимания, прогнозирования и предсказания поведения сложных экономических систем в условиях неопределенности [2]. Он находит широкое применение в моделировании динамики валютных курсов, цен на нефть и биржевых индексов [8]. Например, фрактальные модели позволяют предсказывать моменты неустойчивости валютных курсов и анализировать волнообразные колебания цен на фондовом рынке [1], [10].

Фрактальные модели предоставляют интересные возможности для анализа сложных социально-экономических процессов, в том числе на региональном уровне [3]. Они помогают выявлять скрытые закономерности, признаки самоподобия [12] и динамические свойства, которые традиционные методы могут не учитывать [7]. Например, фрактальные модели могут быть полезны для понимания нелинейных и многомерных процессов, таких как рост населения и кризисы в сельскохозяйственном секторе.

Фрактальный анализ достаточно давно применяется к различным аспектам экономики, предлагая новые идеи и инструменты для понимания экономических явлений. Р. Йилмазер с соавторами [11] (2021) и Д. Вехель [17] исследовали применение фрактального исчисления в экономических моделях, при этом первый из названных авторов фокусируется на уравнении корректировки цен, а второй обсуждает его потенциал в обработке сигналов и финансовой инженерии. И. Андронаш [9] и А. Солиман [15] использовали фрактальный анализ для моделирования и анализа экономических тенденций, причем Андронаш разработал методологию анализа концентрации экономической деятельности, а Солиман проанализировал последствия фрактальных границ в нелинейных экономических системах. Й. Фенгге и Х. Дзинь [16] успешно применили инструментарий фрактального анализа для исследования рынка недвижимости в Китае. Ф. Мвема и др. [14] использовали фрактальный анализ для объяснения динамики показателей, отражающих различные производственные процессы.

Эти, равно как и другие, исследования в совокупности демонстрируют потенциал фрактального анализа в обеспечении более глубокого понимания экономической динамики.

В контексте кризисных явлений фрактальный анализ может помочь определить критические точки или предельные значения, при которых система становится нестабильной. Это знание может быть использовано для разработки стратегий по предотвращению кризисов и смягчению их последствий.

Таким образом, фрактальные методы предлагают многообещающие перспективы для экономистов и аналитиков, позволяя им более точно прогнозировать изменения и лучше управлять экономическими системами в условиях неопределенности и нестабильности.

Материалы и методы. Для целей нашего анализа мы использовали показатель среднедушевого денежного дохода населения регионов России [18], который исследовался с применением следующих показателей.

Simple R/S Hurst Estimation

Простой метод R/S (rescaled range) для оценки показателя Херста включал следующие шаги.

1. Мы разделили каждый из временных рядов, отражающих среднедушевой денежный доход регионов России за 2011–2023 годы (длина N), на A непересекающиеся подпериоды длины n , где $N = A \times n$.

2. Для каждого подпериода $a = 1, 2, \dots, A$:

– вычислили среднее значение E_a и стандартное отклонение S_a ;

– нормализовали данные, вычитая среднее:

$X_{i,a} = X_i - E_a$ для $i = 1, 2, \dots, n$;

– создали кумулятивный временной ряд:

$Y_{k,a} = \sum_{i=1}^k X_{i,a}$ для $k = 1, 2, \dots, n$;

– вычислили размах: $R_a = \max(Y_{k,a}) - \min(Y_{k,a})$ для $1 \leq k \leq n$;

– вычислили нормализованный размах:

$(R/S)_a = R_a / S_a$.

3. Вычислили среднее значение $(R/S)_n$ для всех подпериодов длины n :

$$R / S_n = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A (R / S)_a. \quad (1)$$

4. Повторили шаги 1–3 для различных значений n .

5. Показатель Херста H определяется из соотношения:

$$(R / S)_n \sim cn^H, \quad (2)$$

где c – константа;

H – показатель Херста.

Empirical Hurst Exponent

Для оценки эмпирического показателя Херста мы использовали метод рескейлинга (R/S-анализ). Этот метод основан на вычислении отношения рескейлинга, которое определяется, как:

$$R(n) = \max_{1 \leq k \leq n} (\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})) - \min_{1 \leq k \leq n} (\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})), (3)$$

где X_i – значение временного ряда;
 $\bar{X}$ – среднее значение ряда.

После этого мы вычислили нормированное отношение:

$$\frac{R(n)}{S(n)}, (4)$$

где $S(n)$ – стандартное отклонение временного ряда.

Эмпирический показатель Херста H оценивался из уравнения:

$$E \left[\frac{R(n)}{S(n)} \right] \sim Cn^H, (5)$$

где C – константа.

Corrected Empirical Hurst Exponent

Корректированный эмпирический показатель Херста учитывает возможные искажения, связанные с конечной длиной временного ряда и другими факторами. Мы добавили поправочный коэффициент K , зависящий от длины ряда и других параметров:

$$H_{corrected} = H_{empirical} + K. (6)$$

Поскольку наши данные имеют тренд, мы использовали децимацию для минимизации смещений и устранения тренда перед вычислением показателя Херста.

Theoretical Hurst Exponent

Теоретический показатель Херста H определялся исходя из модели, описывающей временной ряд:

$$H = \frac{d}{2}, (7)$$

где d – параметр самоподобия модели.

Этот показатель зависит от предположений и данных модели, используемой для их описания. Поскольку мы предполагаем, что временной ряд моделируется как процесс с долгосрочной памятью, теоретический показатель Херста отражает степень этой памяти.

Fractal Dimension

Фрактальная размерность – это мера сложности фрактала или распределения в пространстве. Мы использовали одну из распространенных формул для ее определения – метод покрытия:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}, (8)$$

где $N(\varepsilon)$ – минимальное количество ε -размерных покрытий, необходимых для покрытия множества.

Результаты. Нами получены следующие результаты, представленные в таблице 1.

Таблица 1

Показатели Херста и фрактальной размерности среднедушевого денежного дохода населения регионов России, 2011–2023 годы

Субъект федерации	Simple R/S Hurst Estimation	Empirical Hurst Exponent	Corrected Empirical Hurst Exponent	Fractal Dimension
Алтайский край	0,6334	0,8228	0,6514	0,8745
Амурская область	0,6496	0,9188	0,7279	0,8931
Архангельская область	0,6483	0,8862	0,7035	0,7776
Астраханская область	0,6278	0,8082	0,6388	1,1155
Белгородская область	0,6335	0,8474	0,6695	0,8745
Брянская область	0,6489	0,9033	0,7163	0,7776
Владимирская область	0,6344	0,8531	0,6740	1,2224
Волгоградская область	0,6387	0,8672	0,6859	1,2224
Вологодская область	0,6353	0,8582	0,6781	1,1155
Воронежская область	0,6245	0,7965	0,6290	1,1155
Еврейская автономная область	0,6452	0,9026	0,7143	0,8931
Забайкальский край	0,6495	0,9141	0,7245	0,8931
Ивановская область	0,6321	0,8515	0,6720	1,0000
Иркутская область	0,6461	0,8951	0,7091	0,6521
Кабардино-Балкарская Республика	0,6390	0,8326	0,6606	1,1155

Субъект федерации	Simple R/S Hurst Estimation	Empirical Hurst Exponent	Corrected Empirical Hurst Exponent	Fractal Dimension
Калининградская область	0,6371	0,8486	0,6718	1,0000
Калужская область	0,6342	0,8629	0,6812	1,0000
Камчатский край	0,6577	0,9418	0,7480	0,8931
Карачаево-Черкесская Республика	0,6221	0,7794	0,6156	0,7776
Кемеровская область	0,6417	0,9114	0,7194	0,7776
Кировская область	0,6405	0,8450	0,6703	1,0000
Костромская область	0,6340	0,8384	0,6631	1,2630
Краснодарский край	0,6370	0,8708	0,6879	1,0000
Красноярский край	0,6406	0,8964	0,7081	1,0000
Курганская область	0,6311	0,8392	0,6626	1,2224
Курская область	0,6453	0,8796	0,6975	1,3785
Ленинградская область	0,6466	0,8798	0,6982	1,1375
Липецкая область	0,6433	0,8767	0,6946	1,1155
Магаданская область	0,6573	0,9728	0,7704	1,1155
Москва	0,6518	0,9705	0,7664	1,0000
Московская область	0,6409	0,9096	0,7178	1,0000
Мурманская область	0,6546	0,9609	0,7606	0,8931
Ненецкий автономный округ	0,6454	0,9456	0,7458	1,1155
Нижегородская область	0,6363	0,8525	0,6743	1,1155
Новгородская область	0,6185	0,7962	0,6267	1,0000
Новосибирская область	0,6412	0,8967	0,7084	1,2630
Омская область	0,6322	0,8084	0,6404	1,1155
Оренбургская область	0,6283	0,7999	0,6328	1,0000
Орловская область	0,6272	0,8327	0,6565	1,2630
Пензенская область	0,6401	0,8595	0,6809	0,8931
Пермский край	0,6203	0,8179	0,6432	1,0875
Приморский край	0,6453	0,8618	0,6845	0,8931
Псковская область	0,6489	0,9205	0,7289	1,1155
Республика Адыгея	0,6431	0,9093	0,7184	0,8745
Республика Алтай	0,6482	0,8677	0,6899	1,0000
Республика Башкортостан	0,6297	0,8359	0,6597	1,1155
Республика Бурятия	0,6313	0,8222	0,6502	0,8931
Республика Дагестан	0,6288	0,8175	0,6459	1,0995
Республика Ингушетия	0,6300	0,7859	0,6231	1,0000
Республика Калмыкия	0,6533	0,9651	0,7631	1,1155
Республика Карелия	0,6559	0,9683	0,7666	0,8931
Республика Коми	0,6498	0,9435	0,7460	1,0000
Республика Крым	0,6551	0,9609	0,7609	1,0875
Республика Марий Эл	0,6328	0,8239	0,6520	1,0000
Республика Мордовия	0,6393	0,8480	0,6721	1,0000
Республика Саха (Якутия)	0,6435	0,8940	0,7074	0,8745
Республика Северная Осетия – Алания	0,6247	0,8030	0,6339	0,8745
Республика Татарстан	0,6242	0,8200	0,6461	1,2224
Республика Тыва	0,6544	0,9922	0,7833	1,0000
Республика Хакасия	0,6467	0,9189	0,7268	0,7776
Ростовская область	0,6408	0,8728	0,6909	1,0000
Рязанская область	0,6376	0,8477	0,6713	0,8745
Самарская область	0,6400	0,9448	0,7429	1,1926
Санкт-Петербург	0,6504	0,9130	0,7239	1,2630
Саратовская область	0,6464	0,8912	0,7064	0,7776

Субъект федерации	Simple R/S Hurst Estimation	Empirical Hurst Exponent	Corrected Empirical Hurst Exponent	Fractal Dimension
Сахалинская область	0,6549	0,9200	0,7308	1,0000
Свердловская область	0,6302	0,8664	0,6822	0,7776
Севастополь	0,6576	0,9770	0,7736	1,0875
Смоленская область	0,6412	0,8973	0,7089	1,3785
Ставропольский край	0,6303	0,8423	0,6646	1,3785
Тамбовская область	0,6274	0,8277	0,6529	1,0000
Тверская область	0,6411	0,8909	0,7042	1,1155
Томская область	0,6196	0,7999	0,6298	0,8931
Тульская область	0,6264	0,7963	0,6295	1,0000
Тюменская область	0,6472	0,9028	0,7153	0,8931
Удмуртская Республика	0,6206	0,7900	0,6228	0,8931
Ульяновская область	0,6232	0,7901	0,6238	0,8931
Хабаровский край	0,6433	0,8730	0,6919	0,8745
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра	0,6456	0,8758	0,6948	1,0000
Челябинская область	0,6407	0,8972	0,7086	1,0995
Чеченская Республика	0,6196	0,8025	0,6317	1,1155
Чувашская Республика	0,6460	0,8926	0,7073	0,8931
Чукотский автономный округ	0,6530	0,9398	0,7446	1,0000
Ямало-Ненецкий автономный округ	0,6534	0,9729	0,7688	1,3785
Ярославская область	0,6314	0,8400	0,6633	1,1155

Источник: составлено авторами на основе [18].

1. Оценки показателя Херста:

– простая оценка R/S (0,6432753): метод R/S анализа (Rescaled Range) используется для оценки показателя Херста (H). Значение $H > 0,5$ указывает на наличие положительной автокорреляции в серии данных, то есть на тенденцию к устойчивому тренду. В нашем случае $H \approx 0,64$ свидетельствует о том, что динамика доходов населения регионов обладает свойством памяти: положительные изменения, вероятно, будут продолжаться, и наоборот;

– эмпирический показатель Херста (0,8897228): более высокое значение H приближается к 0,9, что указывает на сильную степень персистентности и длительную память в временном ряду. Это означает, что изменения в доходах населения имеют долгосрочное влияние и тенденции сохраняются на продолжительных интервалах;

– скорректированный эмпирический показатель Херста (0,7041722): корректировка учитывает возможные искажения в оценке и дает более точное значение H. Значение около 0,70 все еще подтверждает наличие персистентно-

сти, хотя и в меньшей степени, чем предыдущая оценка;

– теоретический показатель Херста (0,6826896): это ожидаемое значение H на основе теоретических моделей. Оно близко к скорректированному эмпирическому значению, что подтверждает надежность наших оценок.

Вывод: все значения показателя Херста превышают 0,5, что указывает на наличие долгосрочной памяти и персистентности в динамике доходов населения регионов России. Это означает, что существующие тренды имеют тенденцию к продолжению и экономические различия между регионами могут сохраняться или усиливаться со временем. Региональные экономические преимущества или недостатки имеют устойчивый характер.

2. Фрактальная размерность:

– фрактальная размерность по России в целом (1,115477): фрактальная размерность (D) связана с показателем Херста отношением $D = 2 - H$ для временных рядов. Если принимать скорректированное значение $H \approx 0,70$, то $D \approx 1,30$. Однако наше значение $D \approx 1,115$ мо-

жет указывать на особенности анализируемых данных;

– фрактальная размерность по регионам (от 0,6521 до 1,3785): разброс значений фрактальной размерности свидетельствует о различной сложности и степени хаотичности в динамике доходов разных регионов. Меньшие значения D (ближе к 1) указывают на более гладкую и предсказуемую динамику, в то время как большие значения (ближе к 2) – на более сложную и непредсказуемую.

Заключение. Различия в значениях фрактальной размерности между регионами свидетельствуют о том, что для одних регионов свойственны более стабильные экономические условия, тогда как другие подвержены большим колебаниям и неопределенности. Это может быть связано с различиями в экономической структуре, инвестиционной активности, вовлеченности в глобальную экономику, уровне диверсификации экономики и других факторах.

Ранее нами было установлено, что дивергентные процессы приводят к устойчивости межрегионального неравенства [5]. Настоящее исследование подтверждает сделанный нами ранее вывод о персистентности дивергентных процессов в экономическом развитии регионов России. Персистентность в динамике доходов населения говорит о том, что существующие экономические различия между регионами имеют тенденцию к сохранению или даже углублению. Это важно для понимания процессов дивергенции в развитии регионов. Высокие значения показателя Херста и фрактальной размерности в некоторых регионах указывают на усиление межрегионального неравенства. Регионы с устойчивым ростом будут продолжать развиваться быстрее, тогда как отстающие регионы будут все больше отставать. Результаты нашего анализа подчеркивают важность разработки и реализации региональных экономических политик, направленных на снижение неравенства и поддержку отстающих регионов. Применение фрактального анализа и показателя Херста в нашем исследовании позволило более глубоко понять динамику и структурные особенности экономического развития регионов, что дополняет традиционные методы экономического анализа.

Литература

1. Бутырин А., Фомичева С.Г. Исследование фрактальных сингулярностей при анализе фондовых индексов // *π-Economy*. – 2009. – № 5 (85). – С. 220–233.
2. Гамалей Я.В. Фрактальный анализ и прогнозирование денежных потоков // *π-Economy*. – 2008. – № 5 (64). – С. 211–219.
3. Гамалей Я.В. Фрактальный анализ динамики показателей экономики региона // *π-Economy*. – 2008. – № 5 (64). – С. 73–79.
4. Гафарова Е.А., Добикова Д.В. Фрактальный подход к прогнозированию экономических кризисов // *Экономика и экологический менеджмент*. – 2012. – № 1.
5. Дубовик М.В., Дмитриев С.Г. Дивергенция денежных доходов населения регионов России // *Креативная экономика*. – 2024. – № 3 (18). – С. 697–724.
6. Кириченко Л.О. Сравнительный мультифрактальный анализ временных рядов методами детрендированного флуктуационного анализа и максимумов модулей вейвлет-преобразования // *Автоматизированные системы управления и приборы автоматики*. – 2011. – № 157. – С. 66–77.
7. Перепелица В.А., Тлисов А.Б., Тлисова С.М. Фрактальный анализ динамики экономических показателей малых предприятий // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Общественные науки*. – 2004. – № 3. – С. 64–66.
8. Петерс Э.Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
9. Andronache I.C. [et al.]. Using Fractal Analysis in Modeling Trends in the National Economy // *Procedia Environmental Sciences*. – 2016. – (32). – P. 344–351.
10. Fang H., Lai K. S., Lai M. Fractal structure in currency futures price dynamics // *Journal of Futures Markets*. – 1994. – No. 2 (14). – P. 169–181.
11. Khalili Golmankhaneh A. [et al.]. Economic Models Involving Time Fractal // *Journal of Mathematics and Modeling in Finance*. – 2021. – No. 1 (1).
12. La Torre D., Marsiglio S., Privileggi F. Fractals and self-similarity in economics: the case of a stochastic two-sector growth model // *Image Analysis & Stereology*. – 2011. – No. 3 (30). – P. 143–151.
13. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – W.H. Freeman and Co., 1982.
14. Mwema F.M. [et al.]. Advances in manufacturing analysis: fractal theory in modern manufacturing. – Elsevier, 2020. – P. 13–39.

15. Soliman A.S. Fractals in nonlinear economic dynamic systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 1996. – No. 2 (7). – P. 247–256.

16. Yao Fengge, Han Jing. The empirical study on fractal characteristics of real estate market. – Seoul: IEEE, 2010. – P. 772–775.

17. Fractals in Engineering: From Theory to Industrial Applications / ed. J. Lévy Véhel, E. Lutton, C. Tricot. – London: Springer, 1997.

18. Уровень жизни // Федеральная служба государственной статистики. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/13397>.

Информация об авторах

Дубовик Майя Валериановна, доктор экономических наук, доцент, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова.

E-mail: mvdubovik@list.ru.

Дмитриев Сергей Геннадьевич, кандидат экономических наук, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова.

E-mail: sergey.g.dmitrieff@gmail.com.

M.V. DUBOVIK,

*Doctor in Economics, Associate Professor
Plekhanov Russian University of Economics*

S.G. DMITRIEV,

*Ph.D. in Economics, Researcher
Plekhanov Russian University of Economics, Bryansk branch*

FRACTAL ANALYSIS OF DIVERGENT ECONOMIC DEVELOPMENT OF RUSSIAN REGIONS

Abstract. The purpose of the paper is to test the hypothesis of persistent divergent development of Russia's regions. The authors applied fractal analysis to identify stable patterns in the dynamics of per capita monetary income of regional populations. The obtained values of the Hurst exponent and fractal dimension for the analyzed variables confirm the authors' hypothesis about the persistence of interregional inequality based on the selected indicator. High values of the Hurst exponent and fractal dimension in some regions indicate an increase in interregional inequality. Regions with stable growth will continue to develop faster, while lagging regions will fall further behind. The results of our study highlight the importance of developing and implementing regional economic strategies aimed at reducing inequality and supporting less developed regions. The use of fractal analysis and the Hurst exponent in our research allowed for a deeper understanding of the dynamics and structural features of regional economic development, complementing traditional methods of economic analysis. The authors concluded that the dynamics of per capita monetary income exhibit a strong dependence on previous values, which on one hand indicates resilience to external shocks, and on the other hand suggests a conservation of existing trends towards divergence in the trajectories of economic development across the country's regions.

Keywords: fractal analysis, divergence, regional economic development, persistence.

References

1. Butyrin A., Fomicheva S.G. Study of fractal singularities when analyzing stock indices // *π-Economy*. – 2009. – No. 5 (85). – P. 220–233.

2. Gamalei YA.V. Fractal analysis and cash flow forecasting // *π-Economy*. – 2008. – No. 5 (64). – P. 211–219.

3. Gamalei YA.V. Fractal analysis of the dynamics of regional economy indicators // *π-Economy*. – 2008. – No. 5 (64). – P. 73–79.

4. Gafarova E.A., Dobikova D.V. Fractal approach to economic crises forecasting // *Economics and ecological management*. – 2012. – No. 1.

5. Dubovik M.V., Dmitriev S.G. Divergency of money incomes of the population of Russian regions // *Creative economics*. – 2024. – No. 3 (18). – P. 697–724.

6. Kirichenko L.O. Comparative multifractal analysis of time series using the methods of detrended fluctuation analysis and the maximum of wave conversion moduls // Automated control systems and automation devices. – 2011. – No. 157. – P. 66–77.
7. Perepelitsa V.A., Tlisov A.B., Tlisova S.M. Fractal analysis of the dynamics of small enterprises economic indicators // Proceeding of Higher Education Institutions. North Caucasian region. Social sciences. – 2004. – No. 3. – P. 64–66.
8. Peters E.E. Fractal analysis of financial markets. Application of the chaos theory in investment and economics. – Moskva: Internet-treiding, 2004. – 304 p.
9. Andronache I.C. [et al.]. Using Fractal Analysis in Modeling Trends in the National Economy // Procedia Environmental Sciences. – 2016. – (32). – P. 344–351.
10. Fang H., Lai K. S., Lai M. Fractal structure in currency futures price dynamics // Journal of Futures Markets. – 1994. – No. 2 (14). – P. 169–181.
11. Khalili Golmankhaneh A. [et al.]. Economic Models Involving Time Fractal // Journal of Mathematics and Modeling in Finance. – 2021. – No. 1 (1).
12. La Torre D., Marsiglio S., Privileggi F. Fractals and self-similarity in economics: the case of a stochastic two-sector growth model // Image Analysis & Stereology. – 2011. – No. 3 (30). – P. 143–151.
13. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. – W.H. Freeman and Co., 1982.
14. Mwema F.M. [et al.]. Advances in manufacturing analysis: fractal theory in modern manufacturing. – Elsevier, 2020. – P. 13–39.
15. Soliman A.S. Fractals in nonlinear economic dynamic systems // Chaos, Solitons & Fractals. – 1996. – No. 2 (7). – P. 247–256.
16. Yao Fengge, Han Jing. The empirical study on fractal characteristics of real estate market. – Seoul: IEEE, 2010. – P. 772–775.
17. Fractals in Engineering: From Theory to Industrial Applications / ed. J. Lévy Véhel, E. Lutton, C. Tricot. – London: Springer, 1997.
18. Standard of living // Federal State Statistics Service. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/13397>.